Notions Mathématiques de base

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Sommaire

I Ensembles **2**
I.1 Vocabulaire et notations . . . 2
I.2 Règles de calcul dans $\mathcal{P}(E)$ . . . 2
I.3 Produit d'ensembles . . . 3

II Un peu de logique mathématique **3**
II.1 Vocabulaire et connecteurs logiques . . . 3
II.2 La démonstration mathématique . . . 3
II.3 Le raisonnement par récurrence . . . 5

III Applications et Lois de composition interne **6**
III.1 Notion d'application . . . 6
III.2 Composition des applications . . . 7
III.3 Application injective, surjective, bijective . . . 7
III.4 Lois de composition interne . . . 9

IV Relation d'équivalence et d'ordre **9**
IV.1 Partition d'un ensemble . . . 9
IV.2 Relation d'équivalence . . . 10
IV.3 Relation d'ordre . . . 10
IV.4 L'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ . . . 11

I Ensembles

I.1 Vocabulaire et notations

- L'ensemble vide est noté $\varnothing$ ou $\{\}$
- Si E et F sont deux ensembles alors:

$$E = F \text{ si et seulement si } E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

- Si E est un ensemble non vide, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
- A et B étant des parties d'un ensemble E, on note :
  - $A \cup B := \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$: réunion de A et B.
  - $A \cap B := \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \in B\}$: intersection de A et B.
  - $\complement_E A := \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$: le complémentaire de A dans E, noté aussi A^c.
  - $A \setminus B := \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\}$: différence de A et B.

I.2 Règles de calcul dans $\mathcal{P}(E)$

A, B et C étant des parties d'un ensemble E, on montre les règles usuelles suivantes:

- Intersection:
  - $A \cap B = B \cap A$: Commutativité.
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$: Associativité.
  - $A \cap E = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.
- Réunion:
  - $A \cup B = B \cup A$: Commutativité.
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$: Associativité.
  - $A \cup E = E$; $A \cup \varnothing = A$.
- Entre réunion et intersection on a les règles suivantes:
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Complémentaire:
  - $(A^c)^c = A$.
  - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
  - $A \subset B \iff B^c \subset A^c$.
- Ces règles s'appliquent aussi à une réunion ou intersection quelconque. Si I est un ensemble non vide quelconque et A_i une partie de E pour tout i dans I, on pose:
  - $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tel qu'il existe } i \in I \text{ vérifiant } x \in A_i\}$, donc

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ si et seulement si il existe } i \in I \text{ vérifiant } x \in A_i.$$

  - $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tel que pour tout } i \in I,\ x \in A_i\}$, donc

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \text{ si et seulement si pour tout } i \in I,\ x \in A_i.$$

Exemple 1 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{i}, 1\right] =]0, 1]$; $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left[1 - \frac{1}{i}, 1\right] = \{1\}$, alors que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left[1 - \frac{1}{i}, 1\right[= \varnothing$.

I.3 Produit d'ensembles

Définition 1 Etant donné deux ensembles E et F, on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y), où x est élément de E et y élément de F. Si $E = F$ on note E^2 ou $E \times E$.
Plus généralement on définit le produit de n ensembles $E_1, E_2, ..., E_n$, comme étant l'ensemble des $n - uplets$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où pour tout i, $x_i \in E_i$.

Remarque 1 Par définition l'ensemble $E \times F$ est différent de E et de F sauf dans le cas où l'un des deux ensembles est vide. Dans ce cas $E \times F$ est l'ensemble vide.

- L'égalité entre couple se traduit par:

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} .$$

II Un peu de logique mathématique

II.1 Vocabulaire et connecteurs logiques

- Une **proposition** mathématique est un énoncé susceptible d'être vrai ou faux.
- La proposition qui dit le contraire de la proposition de de A est appelée **négation** de A, on la note $\urcorner A$.
- Si A et B sont deux propositions, on définit les propositions:
  - A **ou** B qui est vraie si A est vrai ou B est vrai (le **ou** étant inclusif).
  - A **et** B qui est vraie si A est vrai et B est vrai.
- Une **implication** est un énoncé du type ‹‹**si** A **alors** B››, l'implication $A \Longrightarrow B$ est elle même une proposition qui est fausse dans le seule cas où A est vraie et B est fausse.
- L'implication **réciproque** d'une implication $A \Longrightarrow B$ est l'implication $B \Longrightarrow A$. si les deux implication $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ sont vraies on dit que A et B sont **équivalentes** et on note $A \Longleftrightarrow B$.
- La **contraposée** d'une implication $A \Longrightarrow B$ est l'implication $\urcorner B \Longrightarrow \urcorner A$ qui qui dit la même chose que l'implication initiale.

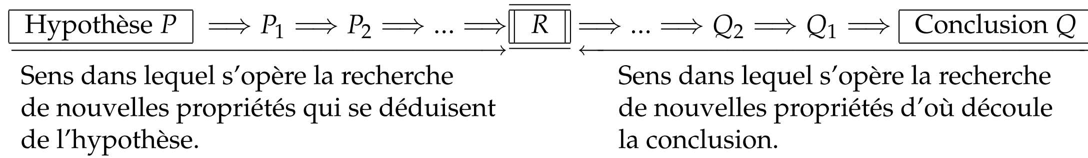
II.2 La démonstration mathématique

En mathématique, en plus des questions du type *calculer, déterminer, résoudre...* la plupart des questions se présentent sous la forme *montrer, démontrer, justifier, prouver, déduire.* Bien entendu il y'a une grande différence entre les deux types de questions.

La démarche démonstrative repose sur une liste de connaissances appelée à évoluer. Cette liste comprend tous les axiomes et théorèmes connus du démonstrateur, mais peut également évoluer par ajout de propriétés au cours de la démonstration.

Il convient d'abord de clairement séparer ce qu'on sait vrai (liste des connaissances, hypothèses diverses) de la conclusion à laquelle on veut arriver. Par ailleurs, il convient de savoir qu'une démonstration ne consiste pas forcément à partir de l'hypothèse, puis par une suite de déductions logiques, à arriver à la conclusion. On peut bien sûr partir de l'hypothèse pour en déduire diverses propriétés en espérant que l'une d'elles finira par être la conclusion cherchée, mais on peut aussi partir de la conclusion pour trouver des propriétés à partir desquelles la conclusion se déduit, en espérant ainsi remonter jusqu'aux hypothèses. On peut également opérer simultanément les deux démarches jusqu'à tomber sur une propriété faisant le lien entre les deux.

Ci-dessous, R est une propriété pouvant servir de jonction entre une progression venant de l'hypothèse et une progression venant de la conclusion :



Il convient également de distinguer ce qu'il faut faire pour **montrer** une conjecture, de ce qu'il faut faire pour **utiliser** une propriété déjà prouvée et faisant donc partie de la liste des connaissances. On donne ci-dessous certaines indications qui peuvent paraître triviales. Par ailleurs, les approches proposées ne sont pas uniques et d'autres peuvent être envisagées.

Pour montrer...

- ... une conjonction A **et** B, on montre A et on montre B.
- ... une disjonction A **ou** B, montrer A ou montrer B.
- ...une implication $A \Longrightarrow B$, ajouter A à sa liste de connaissances et montrer B.
- ...une négation $\urcorner A$, ajouter A à sa liste de connaissance et montrer qu'on a alors une contradiction (principe du **raisonnement par l'absurde**).
- ... $(\exists x \in E)A(x)$, exhiber un élément $t \in E$ bien choisi et montrer $A(t)$ oubien justifier l'existence à travers un résultat théorique général.
- ... $(\forall x \in E)A(x)$, montrer $A(x)$, $x \in E$ étant fixé mais arbitraire. Dans ce cas la démontration commence par ‹‹soit $x \in E$ ...››. Dans le cas où E est l'ensemble $\mathbb{N}$ un **raisonnement par récurrence** peut être fait.

Remarque 2 Pour montrer une implication $A \Longrightarrow B$ on peut aussi procéder par **contraposée** et montrer l'implication $\urcorner B \Longrightarrow \urcorner A$.

Pour utiliser...

- ...une conjonction P **et** Q, ajouter P à la liste des connaissances et ajouter Q.
- ...une disjonction P **ou** Q, utiliser P ou Q pour montrer R en montrant $P \Longrightarrow R$ **et** $Q \Longrightarrow R$ (**raisonnement par disjonction des cas**).
- ...une implication $P \Longrightarrow Q$, ajouter Q à la liste des connaissances à condition que P y soit déjà.
- ...une négation $\urcorner P$, conclure à une absurdité si P fait déjà partie de la liste des connaissances.
- ... $(\exists x \in E)P(x)$, ajouter $P(u)$ à la liste des connaissances, $u \in E$ sur lequel nous n'avons aucune possibilité de choix.
- ... $(\forall x \in E)P(x)$, ajouter $P(t)$ à la liste des connaissances, $t \in E$ étant un élément de notre choix.

Exemple 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \left(n^2 \textit{ impair} \Longrightarrow n \textit{ impair}\right)$.

Il faut montrer l'implication pour tout entier naturel n. Pour cela on considère n quelconque dans $\mathbb{N}$ et on montre l'implication

$$\left(n^2 \text{ impair} \Longrightarrow n \text{ impair}\right) \qquad (P(n))$$

ou sa contraposée

$$\left(n \text{ pair} \Longrightarrow n^2 \text{ pair}\right) \qquad (Q(n))$$

qui est facile à expliciter du fait que tout entier est soit pair soit impair. Et plus facile à démontrer.

En effet si n pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, donc $n^2 = 4p^2 = 2.2p^2$ qui est aussi pair. $Q(n)$ est alors prouvée et par suite $P(n)$, CQFD.

Exemple 3 Soient a, b deux réels. Montrer que $|a+b| = |a| + |b|$ si et seulement si a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.

II.3 Le raisonnement par récurrence

On énnonce les trois formes du principe de récurrence.

Théorème II.1 (dit de récurrence) Soit $P(n)$ une assertion dépendant de la variable n dans $\mathbb{N}$. On suppose que:

(i) $P(0)$ est vrai,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, on dit que $P(n)$ est héréditaire.
Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3 Une variante du principe de récurrence s'obtient, en modifiant (i) et (ii) ci-dessus, comme suit:

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid P(n_0)$ est vrai,

(ii) $\forall n \geq n_0 : P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Théorème II.2 Soit $P(n)$ une assertion dépendant de la variable n dans $\mathbb{N}$. On suppose que:

(i) $P(0)$ est vrai,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : (P(0)$ et $P(1)$ et ... et $P(n)) \Longrightarrow P(n+1)$.
Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 Démontrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}) \left(n^2 \leq 2^n\right).$$

Exercice 2 Prouver par récurrence sur n les formules

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3 Même question avec la formule

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + +(n-1) \times n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

Exercice 4 Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 5 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

III Applications et Lois de composition interne

III.1 Notion d'application

Définition 2 E et F étant deux ensembles non vides, en associant à chaque élément x de E un et un seul élément y de F, on définit une **application** de E dans F.
Si on note cette application f, l'élément y associé à x est noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f, x est alors appelé **antécédent** de y par f.

Pour représenter l'application f de E dans F schématiquement on écrit:

$$f : E \longrightarrow F, x \longrightarrow f(x) \text{ ou } E \xrightarrow{f} F$$

Donc une application est détérminée par:

- Son *ensemble de départ* E.
- Son *ensemble d'arrivée* F.
- Son *graphe* $G = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F$.

Exemple 4 Si $E \subset F$, l'application $i : E \longrightarrow F, x \longrightarrow x$ est appelée l'injection canonique de E dans F.

Exemple 5 Si $E = F$, l'application $Id_E : E \longrightarrow E, x \longrightarrow x$ est appelée l'identité de E.

On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E, l'ensemble des applications de E dans F. L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Restriction, prolongement

Si f est une application de E dans F et A une partie de E, l'application

$$g : A \longrightarrow F, x \longmapsto f(x)$$

est appelée restriction de f à A. On la note $f_{|_E}$. f est alors appelée prolongement de g à E.

Exemple 6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|$; les restrictions de f à $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, respectivement sont: $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -x$.

Image et image réciproque d'une partie

Soient $E \xrightarrow{f} F$, A une partie de E et B une partie de F. On définit:

- L'image de A par f est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}$ qui est une partie de F. $f(E)$ et par fois noté $\text{Im}(f)$.
- L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$ qui est une partie de E.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Déterminer les ensembles suivants:

$$f([-3,-1]); f(]-2,1[); f^{-1}(]-\infty,2[); f^{-1}([1,+\infty[).$$

Propriétés

Soient $E \xrightarrow{f} F$, A, B des parties de E, X et Y des parties de F; on a:

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
- $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ par contre, on a seulement: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exemple 7 Un exemple graphique où l'inclusion ci-dessus est stricte...

- Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
- Si $X \subset Y$ alors $f^{-1}(X) \subset f(^{-1}Y)$.

III.2 Composition des applications

Définition 3 Soient $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ deux applications. On définit une application de E dans G, notée $g \circ f$, par:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G, x \longmapsto g(f(x))$$
$$\searrow\!\!- \; g\circ f \; -\!\!\nearrow$$

Exemple 8 Si $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$, alors $g \circ f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x^2} = |x| \end{array}$ .Soient $E \xrightarrow{f} F$, $F \xrightarrow{g} G$ et $G \xrightarrow{h} H$ des applications, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Par contre la composition n'est pas commutative, c'est à dire que généralement

$$f \circ g \neq g \circ f$$

même si $E = F = G$...

III.3 Application injective, surjective, bijective

Equation

Soient $E \xrightarrow{f} F$ et $b \in F$; le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } x \in E \text{ tel que} \\ f(x) = b. \end{array} \right. \quad \text{(III.1)}$$

est appelé équation à inconnue x dans E.

Exemple 9 Dans $\mathbb{R}$ les équations polynômiales. Dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes linéaires.

- On dit que f est **surjective** si pour tout $b \in F$, l'équation (III.1) admet une solution **au moins**. ie:

  $$\forall b \in F, \exists a \in F : b = f(a).$$

  Ce qui équivaut à dire que $f(E) = F$.

- On dit que f est **injective** si pour tout $b \in F$, l'équation (III.1) admet **au plus** une solution. ie:

  $$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

  Où de manière équivalente

  $$\forall x, x' \in E : x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

- On dit que f est **bijective** si pour tout $b \in F$, l'équation (III.1) admet une solution et une seule. ie:

  $$\forall b \in F, \exists! a \in F : b = f(a).$$

Proposition 1 la composée d'applications injectives (resp surjectives, bijectives) est injectives (resp surjectives, bijectives). Et réciproquement:

- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve: En exercice.. ▪

Exemple 10 $f : \begin{array}{c} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{c} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} n-1 \text{ si } n > 0 \\ 0 \text{ si } n = 0. \end{array} \right. \end{array}$. On a $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ bijective alors que f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Exercice 7 Soit $E \xrightarrow{f} F$ et A une partie de E.

1. Montrer que $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
2. Montrer que si f est injective on a égalité: $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 8 Soit $E \xrightarrow{f} F$ et B une partie de F.

1. Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$.
2. Montrer que si f est surjective, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Réciproque d'une application bijective

Si $E \xrightarrow{f} F$ est bijective, on appelle application réciproque de f, l'application notée f^{-1} définie de F dans E par

$$\forall (x, y) \in E \times F : f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Dans ce cas on a: $\boxed{f \circ f^{-1} = Id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E}$.

Exemple 11 Id_E est bijective, et on a $(Id_E)^{-1} = Id_E$.

Remarque 4 Si $E \xrightarrow{f} F$ est bijective alors pour toute partie Y de F, $f^{-1}(Y)$ se confond avec l'image (directe) de Y par f^{-1}.

Proposition 2 Si $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ sont bijectives alors

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Remarque 5 Si $E \xrightarrow{f} F$ est bijective alors pour toute partie Y de F, $f^{-1}(Y)$ se confond avec l'image (directe) de Y par f^{-1}.

Théorème III.1 Soit f une application de E dans F.
f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.
Dans ce cas $g = f^{-1}$.

Preuve: $\Rightarrow$) Par définition de f^{-1}.
$\Leftarrow$) On montre que f est injective et surjective. ▪

Exemple 12 Avec $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f \neq Id_E$.

Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème III.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle et f induit une bijection de I dans $f(I) = J$ en plus f^{-1} de J dans I est continue et varie dans le même sens que f.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1. f est-elle surjective? injective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la **restriction** $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], x \longmapsto f(x)$ est bijective et déterminer g^{-1}.
4. Retrouver ces résultats en étudiant les variations de f.

Exercice 10 Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.
f est-elle surjective ? injective ? déterminer $f^{-1}([-1, 1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

III.4 Lois de composition interne

Définition 4 Une l.c.i ou opération sur un ensemble non vide E est une application de $E \times E$ dans E.

Notations

Usuellement les l.c.i sont notées à l'aide des opérateurs $+, -, *, ., \times, \circ$... et l'image du couple (x, y) est noté:

$$x + y, x - y, x.y, x * y \text{ ou simplement } xy \text{ pour une lois sans symbole.}$$

On écrit $(E, +)$ pour dire que E est muni de la l.c.i $'' + ''$, ou encore $(E, +, .)$ pour dire que E est muni des deux l.c.i $'' + ''$ et $''.''$.

Commutativité, associativité, neutre

Une l.c.i $*$ sur E est dite **commutative** si

$$\forall (x, y) \in E^2 : x * y = y * x$$

Elle est dite **associative** si

$$\forall (x, y, z) \in E^3 : x * (y * z) = (x * y) * z$$

Un élément e de E est appelé **élément neutre** de $*$ si

$$\forall x \in E : x * e = e * x = x$$

Remarque 6 Si une l.c.i admet un élément neutre, il est est unique.

En effet, supposons par absurde que e et e' sont deux éléments neutres de $(E, *)$.
Donc $e' = e * e'$ car e est neutre, de même e' étant neutre donc $e = e * e'$.
C'est à dire $e' = e$.

Monoïde

On dit que E muni de lois $*$ est un monoïde si elle est associative et admet un élément neutre.
Si en plus la lois est commutative le monoïde $(E, *)$ est dit commutatif.

Symétrique d'un élément

Dans un monoïde $(E, *)$ d'élément neutre e, un élément x est dit symétrisable s'il existe x' dans E tel que $x * x' = x' * x = e$.
x' est alors appelé le symétrique de x. En notation multiplicative il est noté $''x^{-1}''$ et est appelé inverse. En notation additive il est appelé opposé et est noté $'' - x''$.

Partie stable

Une partie A de E est dite stable par la lois $*$, si

$$\forall x, y \in A : x * y \in A$$

Dans ce cas, $*$ définit sur A une l.c.i, appelée **lois induite** par celle de E.

IV Relation d'équivalence et d'ordre

IV.1 Partition d'un ensemble

Définition 5 Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{S}$ est une partition de E si

(i) $\forall X \in \mathcal{S} : X \neq \varnothing$.
(ii) $\forall X, Y \in \mathcal{S} : X \neq Y \Longrightarrow X \cap Y = \varnothing$.
(iii) $\bigcup_{X \in \mathcal{S}} X = E$.

Exemple 13 Un exemple où E est fini.

Proposition 3 Soit $f : E \longrightarrow F$ surjective. $\mathcal{S} = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in F\}$ est une partition de E.

Preuve: (i) car f est surjective.
(ii) Posons $X = f^{-1}(\{x\})$ et $Y = f^{-1}(\{y\})$ tels que $x \neq y$.
Si par absurde on suppose que $X \cap Y \neq \varnothing$ et $z \in X \cap Y$, alors $f(z) = x$ et $f(z) = y$, ce qui est absurde.
(iii) pour tout $x \in E, x \in f^{-1}(\{f(x)\})$, d'où (iii) ∎

IV.2 Relation d'équivalence

Définition 6 (Relation binaire) On appelle relation binaire sur E, la donnée d'une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$.

Pour exprimer le fait qu'un couple (x, y) est dans $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y$ et on dit que x et y sont en relation.

Définition 7 (relation d'équivalence) Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si

(i) $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$ (reflexivité).
(ii) $\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$ (symétrie).
(iii) $\forall x, y, z \in E : (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$ (transitivité).

Exemple 14 $'' = ''$ dans E est relation d'équivalence.

Définition 8 (Classe d'équivalence) Si $\mathcal{R}$ est équivalence sur E et $x \in E$, la classe d'équivalence de x est la partie notée $\bar{x} = \{y \in E : x\mathcal{R}y\}$.
L'ensemble de toute les classes d'équivalence, est appelé l'ensemble quotient modulo $\mathcal{R}$, et est noté $E/\mathcal{R}$, c'est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 15 Avec $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$.

Propriétés $\mathcal{R}$ étant une équivalence sur E, on a:

- $\bar{x} = \bar{y} \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$.
- $E/\mathcal{R} = \{\bar{x} \mid x \in E\}$ est une partition de E. Et réciproquement toute partition de E définie une relation d'équivalence sur E.

Preuve: Voir surtout le fait que toute partition définie une équivalence ∎

IV.3 Relation d'ordre

Définition 9 On appelle relation d'ordre sur E toute relation binaire $\mathcal{S}$ qui soit

(i) $\forall x \in E : x\mathcal{S}x$ (reflexivité).
(ii) $\forall x, y \in E : (x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x) \Longrightarrow x = y$ (antisymétrie).
(iii) $\forall x, y, z \in E : (x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z) \Longrightarrow x\mathcal{S}z$ (transitivité).

Usuellement les relation d'ordre sont notées à l'aide des symboles:

$$\leq, \subset, \ll, \lll \ldots.$$

Exemple 16 $'' \leq ''$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Exemple 17 $'' \subset ''$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}(E)$.

Ordre total, ordre partiel

Définition 10 Si pour tout (x, y) dans E on a $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$, on dit que l'ordre est total, et que E est totalement ordonné par $\mathcal{S}$. Si non, on dit que l'ordre est partiel.

Exemple 18 $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné. Par contre $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné.

Exercice 11 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Dans $\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$, on définit la relation $\mathcal{S}$ par

$$X\mathcal{S}Y \iff [X = Y \text{ ou } (\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y)]$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Si on suppose E totalement ordonné. Est-ce que $\mathcal{S}$ est totale?

Majorant, minorant, plus grand et plus petit élément

Définition 11 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A une partie de E. Un élément m de E est appelé un majorant (resp minorant) de A, si

$$\forall a \in A : a \leq m \text{ (resp } m \leq a).$$

Si m est dans A, il est appelé plus grand élément (resp plus petit élément) de A ou maximum (resp minimum) de A. Il est noté $\max(A)$ (resp $\min(A)$).

Exemple 19 Toute partie finie de $\mathbb{N}$ admet un max et min .

Exercice 12 Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, on considère la partie $\mathcal{A} = \{A; B\}$, où A et B sont deux parties de E.

1. Donner l'ensemble des majorants et des minorants de $\mathcal{A}$.
2. A quelle condition $\mathcal{A}$ possède-t-il un max (resp un min)?

IV.4 L'ordre naturel sur $\mathbb{N}$

L'ordre naturel sur $\mathbb{N}$, vérifie les propriétés suivantes:

- $(\mathbb{N}, \leq)$ est totalement ordonné.
- 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
- Tout entier n admet un *successeur* $n + 1$, avec $n < n + 1$ et

  $$\forall p, q \in \mathbb{N} : (p < q \iff p + 1 \leq q)$$

  ie: il n'y a aucun entier entre un entier et son successeur.
- Tout entier $n \neq 0$ admet un *prédécesseur* $n - 1$.

Théorème IV.1 Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Preuve: Soit $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. On note M l'ensemble des minorants de A.
$0 \in M$ et $M \neq \mathbb{N}$, donc M ne vérifie pas la propriété (ii) du principe de récurrence.
C'est à dire:

$$\exists n_0 \in M \mid n_0 + 1 \notin M$$

On montre alors que $n_0 \in A$. En effet, si par absurde on suppose que $n_0 \notin A$ alors $\forall n \in A : n_0 < n$, donc $\forall n \in A : n_0 + 1 \leq n$, c'est à dire que $n_0 + 1 \in M$, ce qui absurde ∎

Corollaire IV.2 (récurrence forte) Soit $P(n)$ une assertion dépendant de la variable n dans $\mathbb{N}$. On suppose que:

(i) $P(0)$ est vrai,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : (P(0) \text{ et } P(1) \text{ et } ... \text{ et } P(n)) \Longrightarrow P(n+1)$.

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve: Considérons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$, par absurde supposons que $B = \mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$,
Alors B possède un minimum $n_0 > 0$. Donc $\forall p < n_0 : p \in A$ et d'après (ii) du corollaire $P(n_0)$ est vraie, ce qui contredit le fait que $n_0 \in B$ ▪

Exemple 20 (principe de déscente infinie de Fermat) Il n'existe aucune suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$.
En effet si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{N}$, alors l'ensemble $U = \{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de minimum, ce qui est absurde.

Théorème IV.3 Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Preuve: Soit $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. On note M l'ensemble des majorants de A et $m_0 = \min(M)$.
Si $m_0 \notin A$ alors $\forall n \in A : n < m_0$, donc $m_0 \neq 0$ et $\forall n \in A : n \leq m_0 - 1$, ce qui contredit le fait que $m_0 = \min(M)$. ▪